# 第 3 章　微分法

## 3.1　導関数

### 3.1.1　微分係数と導関数

**A 微分係数**

関数 $f(x)$ について，極限値 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**であるという．また，この値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**といい，$\boldsymbol{f'(a)}$ で表す．

**微分係数**

$$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

**[注意]** $a+h=x$ とおくと $h=x-a$ であり，$h\longrightarrow 0$ のとき $x\longrightarrow a$ となる．

**例 3.1 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ の $x=3$ における微分係数 $f'(3)$**

$$\begin{aligned}
f'(3)&=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{3+h}-\sqrt{3})(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)-3}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

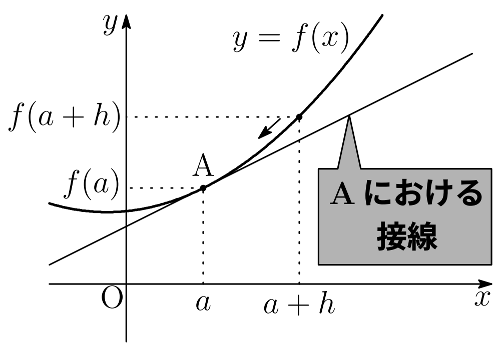
**[注意]** 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ では，定義域の端 $x=0$ では微分係数を考えない．

**練習 3.1** 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ について，次の微分係数を求めよ．

(1) $f'(1)$

(2) $f'(2)$

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき，微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きを表す[1]．




**練習 3.2** 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ のグラフ上の点 $(3,\ \sqrt{3})$ における接線の傾きを求めよ．

[1] 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能でないとき，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ で接線を引くことはできないか，または接線は $x$ 軸に垂直である．

## B 微分可能と連続

関数 $f(x)$ について，次のことが成り立つ．

**微分可能と連続**

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$x=a$ で連続である．

**[証明]** $x \neq a$ のとき　$f(x)-f(a)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)$

ここで，関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

であり，かつ　$\displaystyle\lim_{x\to a}(x-a)=0$

が成り立つから

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=f'(a)\cdot 0=0$$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

ゆえに，関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続である．　**[証終]**

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であっても，$x=a$ で微分可能であるとは限らない．すなわち，グラフが切れ目なくつながっていても，接線が引けない点をもつ関数が存在する．

**例 3.2** 関数 $f(x)=|x|$ について，

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

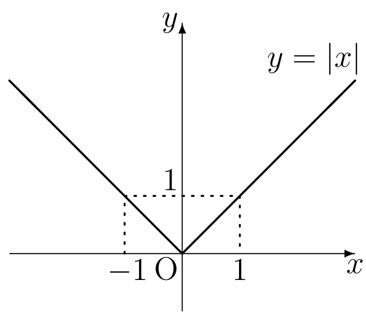
が成り立つから，$f(x)$ は $x=0$ で連続である．

一方 $f(x)=|x|$ について

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}$$

である．ここで

$$\lim_{h\to +0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h}{h}=1$$
$$\lim_{h\to -0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{-h}{h}=-1$$




であるから，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ すなわち $f'(0)$ は存在しない．

よって，関数 $f(x)=|x|$ は $x=0$ で微分可能でない．

**練習 3.3** 次の関数 $f(x)$ は $x=1$ で微分可能でないことを示せ.

(1) $f(x)=|x-1|$

(2) $f(x)=|x^2-1|$

## C 導関数

関数 $f(x)$ が，ある区間のすべての $x$ の値で微分可能であるとき，$f(x)$ はその**区間で微分可能**であるという．関数 $f(x)$ が，ある区間で微分可能であるとき，その区間の各値 $a$ に微分係数 $f'(a)$ を，それぞれ対応させる関数を，$f(x)$ の**導関数**といい，記号 $\boldsymbol{f'(x)}$ で表す.

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，次の式で定義される.

**$f(x)$ の導関数**

$$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

関数 $y=f(x)$ の導関数は，$\boldsymbol{y'}$，$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d}{dx}f(x)}$ などの記号でも表す.

関数 $y=f(x)$ において，$x$ の変化量を表すのに，$h$ の代わりに記号 $\boldsymbol{\Delta x}$ を用いることがある．$\Delta x$ を $x$ の**増分**という．このとき，$y$ の変化量 $f(x+\Delta x)-f(x)$ を $\boldsymbol{\Delta y}$ で表し $y$ の増分という.

増分を用いると，

$$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

と表される.

**例 3.3** 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ の導関数は

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{x-(x+h)}{(x+h)x} \right\} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h)x} \\
&= -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

**練習 3.4** 導関数の定義に従って，次の関数の導関数を求めよ．

(1) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$

### 3.1.2　導関数の計算

**A 導関数の性質**

関数 $f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを，その関数を**微分する**という．関数を微分するために，導関数の計算方法を調べることにしよう．

導関数について，次の公式が成り立つ．

**導関数の公式**

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき

**1**　$\boldsymbol{\{k\,f(x)\}' = k\,f'(x)}$　　ただし，$k$ は定数

**2**　$\boldsymbol{\{f(x)+g(x)\}' = f'(x)+g'(x)}$

**3**　$\boldsymbol{\{f(x)-g(x)\}' = f'(x)-g'(x)}$

**4**　$\boldsymbol{\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$

**1**〜**3** は，すでに数学 II で学んだ公式である．そこで，**4** を証明する．

**[4 の証明]**

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ はともに微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x),\quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

また，微分可能ならば連続であるから　$\displaystyle\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$

よって　$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$　**[証終]**

関数 $x^n$ の導関数について，数学 II で次のことを学んでいる．

$$(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2$$

また，$c$ を定数とするとき　　$(c)' = 0$
これらと導関数の公式 **4** を用いて，関数 $x^4$ の導関数を求めてみよう．

**例 3.4**　　$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)'x + x^3(x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1$

よって　　$(x^4)' = 4x^3$

**練習 3.5** 例 3.4 と同様にして，次のことを示せ．

(1) $(x^5)' = 5x^4$

(2) $(x^6)' = 6x^5$

一般に，次のことが成り立つ[2]．

**$x^n$ の導関数**

$n$ が自然数のとき　　$\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$

[2]数学的帰納法によって証明できる．
$n = k$ のとき成り立つ，すなわち $(x^k) = kx^{k-1}$ であると仮定すると

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)'x + x^k(x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k+1)x^k$$

よって，$n = k+1$ のときも成り立つ．

**例題 3.1** 次の関数を微分せよ．

(1)　$y = 2x^5 - 5x^4$　　　　(2)　$y = (x^2 - 3)(4x^2 + 5)$

**【解】** (1)　$y' = 2 \cdot 5x^4 - 5 \cdot 4x^3$

$$= 10x^4 - 20x^3$$

(2)　$y' = (x^2 - 3)'(4x^3 + 5) + (x^2 - 3)(4x^2 + 5)'$　　← 公式 **4** を用いている．

$$= 2x(4x^2 + 5) + (x^2 - 3) \cdot 8x$$

$$= 8x^3 + 10x + 8x^3 - 24x$$

$$= 16x^3 - 14x$$

**練習 3.6** 次の関数を微分せよ．

(1) $y = x^5 + 2x^4$

(2) $y = 3x^6 - 4x^3$

(3) $y = (x + 1)(x^3 - 4x)$

(4) $y = (3x^2 - 2)(x^2 + x + 1)$

## B 商の導関数

これまでは，$x$ の多項式で表された関数の導関数を計算してきたが，次に $x$ の分数関数の導関数についても調べてみよう．

84 ページの公式 **4** は「積の導関数」であったが,「商の導関数」について，次の公式が成り立つ．

**商の導関数**

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき

**5** $\displaystyle \left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

**6** $\displaystyle \left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

**[5 の証明]** $g(x) \neq 0$ であるから　$\displaystyle g(x)\cdot\frac{1}{g(x)} = 1$

公式 **4** を用いて両辺を微分すると

$$g'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + g(x)\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = 0$$

よって　$\displaystyle g(x)\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{g(x)}$

したがって　$\displaystyle \left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$　**[証終]**

**練習 3.7** $\displaystyle \frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$ と公式 **4**，**5** を用いて公式 **6** を証明せよ．

**例題 3.2** 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{1}{3x+2}$　　　　(2) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

**【解】** (1) $y' = -\dfrac{(3x+2)'}{(3x+2)^2} = -\dfrac{3}{(3x+2)^2}$

(2) $y' = \dfrac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

**練習 3.8** 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{1}{2x-3}$

(2) $y = \dfrac{x^2}{x+3}$

(3) $y = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$

公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ は，正の整数 $n$ について成り立つ．$n$ が負の整数のとき，$n = -m$ とおくと，$m$ は正の整数であるから

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} \qquad \longleftarrow \ \frac{x^{m-1}}{x^{2m}} = x^{(m-1)-2m} = x^{-m-1}$$
$$= -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

一般に，次のことが成り立つ．

**$x^n$ の導関数**

$n$ が整数のとき $\qquad \boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$

**[注意]** $n = 0$ の場合は，$x^0 = 1$ であることから成り立つ．

**例 3.5** $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$

**練習 3.9** 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \dfrac{3}{x}$

(2) $y = \dfrac{2}{x^3}$

(3) $y = -\dfrac{4}{x^2}$

## C 合成関数の微分法

関数 $y=(x^3+1)^2$ において，$u=x^3+1$ という関数を考えると，$y=u^2$ となり，$y$ は $u$ の関数である．すなわち，$y$ は 2 つの関数

$$y=u^2, \qquad u=x^3+1$$

の合成関数である．

合成関数 $y=f(g(x))$ の導関数を，2 つの関数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ の導関数で表すことを考えてみよう．

$u$ の関数 $y=f(u)$，$x$ の関数 $u=g(x)$ がともに微分可能なとき，

$x$ の増分 $\Delta x$ に対する $u$ の増分を $\Delta u$,
$u$ の増分 $\Delta u$ に対する $y$ の増分を $\Delta y$

とすると，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は次のように書くことができる．

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$u=g(x)$ は連続関数であるから，$\Delta x \longrightarrow 0$ のとき　$\Delta u \longrightarrow 0$ となる．

よって

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\&=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

以上から，次のことが成り立つ．

**合成関数の微分法**

$y=f(u)$ が $u$ の関数として微分可能で，$u=g(x)$ が $x$ の関数として微分可能なとき，合成関数 $y=f(g(x))$ の導関数について

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

**例題 3.3** 次の関数を微分せよ.

$$y = (3x^2 - 2)^5$$

**【解】** $u = 3x^2 - 2$ とすると $y = u^5$ であり

$$\frac{dy}{du} = 5u^4, \quad \frac{du}{dx} = 6x$$

よって $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = 5u^4 \cdot 6x = 30x(3x^2 - 2)^4$

**練習 3.10** 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (3x + 1)^4$

(2) $y = (1 - 2x^2)^3$

(3) $y = \dfrac{1}{(4x + 3)^2}$

「合成関数の微分法」の公式において，

$$\frac{dy}{dx} = \{f(g(x))\}', \quad \frac{dy}{du} = f'(u) = f'(g(x)), \quad \frac{du}{dx} = g'(x)$$

と表すと，この公式は次のようになる．

$$\boldsymbol{\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)}$$

この公式を用いると，例題 3.3 の関数 $y = (3x^2-2)^5$ は，次のように微分できる．

$$\begin{aligned} y' &= 5(3x^2-2)^4 \cdot (3x^2-2)' \\ &= 5(3x^2-2)^4 \cdot 6x \\ &= 30x(3x^2-2)^4 \end{aligned}$$

**練習 3.11** 次の関数を微分せよ．ただし，$a$，$b$ は定数とする．

(1) $y = (ax+b)^6$

(2) $y = \dfrac{1}{(ax+b)^3}$

**練習 3.12** 次のことを示せ．ただし，$a$，$b$ は定数，$n$ は整数とする．

(1) $\dfrac{d}{dx}f(ax+b)=af'(ax+b)$

(2) $\dfrac{d}{dx}\{f(x)\}^n=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

## D 逆関数の微分法

逆関数を利用してもとの関数の導関数を求めることを考えよう．

**例 3.6** 関数 $y=\sqrt[4]{x}$ の式を $x$ について解くと，

← $y=x^4\ (x \geqq 0)$ は $y=\sqrt[4]{x}$ の逆関数になっている．

$$x=y^4 \qquad \cdots ①$$

である．合成関数の微分法の公式を用いると

$$\frac{d}{dx}y^4=\frac{d}{dy}y^4\cdot\frac{dy}{dx}=4y^3\frac{dy}{dx}$$

であるから，① の両辺を $x$ で微分すると

$$1=4y^3\frac{dy}{dx}$$

よって，関数 $y=\sqrt[4]{x}$ の導関数は，次のようになる．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4y^3}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

一般に，$f(x)$，$g(x)$ が互いに逆関数で，ともに微分可能であるとする．

$y=f(x)$ を $x$ について解くと　　$x=g(y)$

この両辺を $x$ で微分すると　　$1=\dfrac{d}{dx}g(y)$

すなわち　　$1=\dfrac{d}{dy}g(y)\cdot\dfrac{dy}{dx}$　　← 右辺は合成関数の微分法による．

ここで，$g(y)=x$ であるから　　$1=\dfrac{dx}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

したがって，次の公式が得られる．

**逆関数の微分法**

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

逆関数の微分法の公式を用いて，例3.6の関数 $y=\sqrt[4]{x}$ の導関数を求めてみよう．

$y=\sqrt[4]{x}$ を $x$ について解くと，$x=y^4$ であるから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{4y^3}=\frac{1}{4(\sqrt[4]{x})^3}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

**練習 3.13** 逆関数の微分法の公式を用いて，次の関数を微分せよ．

(1) $y=\sqrt[6]{x}$

(2) $y=\sqrt[3]{x}$　$(x>0)$

**E $x^p$ の導関数**

関数 $y=\sqrt[4]{x}$ は，$y=x^{\frac{1}{4}}$ とも表される．

このように，分数の指数で表された関数の導関数を調べてみよう．

$n$ が正の整数であるとき，関数 $y=x^{\frac{1}{n}}$ の導関数は，逆関数の微分法の公式を用いて，次のようにして求められる．

$y=x^{\frac{1}{n}}$ を $x$ について解くと

$$x=y^n$$

よって　$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{ny^{n-1}}$$　←　逆関数の微分法

ここで　$$\frac{1}{y^{n-1}}=\frac{1}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}=\frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}}=x^{\frac{1}{n}-1}$$

したがって　$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$　すなわち　$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

上の結果は，すでに学んだ導関数の公式

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

において，指数 $n$ を $\frac{1}{n}$ に置き換えたものであることがわかる．

一般に，次の公式が成り立つ.

**$x^p$ の導関数**

$p$ が有理数のとき　　$\boldsymbol{(x^p)' = px^{p-1}}$

**[証明]** $p$ が有理数のとき，$p = \dfrac{m}{n}$ となる正の整数 $n$ と整数 $m$ がある.

よって　　$x^p = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$

$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ と合成関数の微分法の公式を用いると

$$
\begin{aligned}
(x^p)' &= \left\{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\right\}' \\
&= m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' \\
&= m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \\
&= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \\
&= px^{p-1}
\end{aligned}
$$

**[証終]**

← 指数を計算すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{m-1}{n} + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \\
&= \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \\
&= \frac{m}{n} - 1
\end{aligned}
$$

**例 3.7　関数 $y = \sqrt[4]{x^3}$ の導関数**

$y = \sqrt[4]{x^3}$ は $y = x^{\frac{3}{4}}$ とも表せるから

$$y' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$$

**練習 3.14** 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \sqrt{x}$

(2) $y = \sqrt[3]{x^2}$

(3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

### 3.1.3　補充問題

**1** $n$ を正の整数とするとき，関数 $y = x^n$ を導関数の定義に従って微分せよ．ただし，次の二項定理を用いてよい．

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k}b^k + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

**2** 関数 $y = f(x)g(x)h(x)$ の導関数は

$$y' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

であることを示せ．また，これを用いて，次の関数を微分せよ．

$$y = (x^2+1)(x+2)(3x-4)$$

**3** 次の関数を微分せよ.

(1) $y=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3$

(2) $y=\sqrt{4-x^2}$

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**【答】**

**1** $\left[\ \dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}={}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^{n-2}+h^{n-1}\ \right]$

**2** (後半) $y'=12x^3+6x^2-10x+2$

**3** (1) $y'=3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$　(2) $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

(3) $y'=\dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

# 3.2 いろいろな関数の導関数

## 3.2.1 いろいろな関数の導関数

**A 三角関数の導関数**

まず，関数 $\sin x$ の導関数を調べよう．

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

において，$\sin(x+h) - \sin x = \sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x$

$$= (\cos h - 1)\sin x + \cos x \sin h$$

であるから　$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \left( \frac{\cos h - 1}{h} \sin x + \frac{\sin h}{h} \cos x \right)$

ここで，$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$，$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ により[3]

$$(\sin x)' = 0 \cdot \sin x + 1 \cdot \cos x = \cos x$$

となる．

**練習 3.15** 関数 $\cos x$ の導関数について，次のことを示せ．

$$(\cos x)' = -\sin x$$

関数 $\tan x$ については，$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ と，商の導関数の公式により

$$(\tan x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

[3] $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ は 63 ページの応用例題 2.7，$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ は 61 ページの公式による．

前ページの結果をまとめると，次のようになる．

**三角関数の導関数**

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

**例題 3.4** 次の関数を微分せよ．

(1)　$y = \sin 3x$　　　(2)　$y = \cos^2 x$

(3)　$y = \dfrac{1}{\tan x}$

**【解】** (1)　$y' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3\cos 3x$

(2)　$y' = 2\cos x \cdot (\cos x)' = 2\cos x \cdot (-\sin x)$　　$\longleftarrow 2\sin x\cos x = \sin 2x$

$= -\sin 2x$

(3)　$y' = -\dfrac{(\tan x)'}{\tan^2 x} = -\dfrac{1}{\tan^2 x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$　　$\longleftarrow \tan^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$= -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

**［注意］** (1)　$f(x) = \sin x$ とすると，$y = f(3x)$，$f'(x) = \cos x$ である．

合成関数の微分法の公式により　　$y' = f'(3x) \cdot (3x)' = 3\cos 3x$

(2)，(3) も同様である．

**練習 3.16** 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \cos 2x$

(2) $y = \sqrt{2}\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

(3) $y = \sin^2 x$

(4) $y = \tan^2 x$

(5) $y = \dfrac{1}{\sin x}$

(6) $y = \cos^2 3x$

**練習 3.17** 次の関数を微分せよ.

(1) $y = x\sin x + \cos x$

(2) $y = x\cos x - \sin x$

## B 対数関数の導関数

$a$ を 1 でない正の定数とするとき，対数関数 $\log_a x$ の導関数を調べてみよう．

$$\begin{aligned}(\log_a x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right\}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right\}\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{h}{x}=k$ とおくと，$h \longrightarrow 0$ のとき $k \longrightarrow 0$ であるから，次のことがいえる．

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\log_a(1+k)^{\frac{1}{k}} \qquad \cdots ①$$

$k \longrightarrow 0$ のときの $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ の極限を調べると，次の表のようになる．

| $k$ | $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ | $k$ | $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ |
|---|---|---|---|
| 0.1 | $2.593742\cdots$ | $-0.1$ | $2.867971\cdots$ |
| 0.01 | $2.704813\cdots$ | $-0.01$ | $2.731999\cdots$ |
| 0.001 | $2.716923\cdots$ | $-0.001$ | $2.719642\cdots$ |
| 0.0001 | $2.718145\cdots$ | $-0.0001$ | $2.718417\cdots$ |
| 0.00001 | $2.718268\cdots$ | $-0.00001$ | $2.718295\cdots$ |

この表から予想されるように，$k \longrightarrow 0$ のとき，$(1+k)^{\frac{1}{k}}$ は一定の値に限りなく近づくことが知られている．この極限値を $\boldsymbol{e}$ で表す．

$$e = \lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$$

$\longleftarrow e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ とも表される．

$e$ は次のような数で，無理数であることが知られている．

$$e = 2.71828182845\cdots$$

正の定数 $e$ を用いると，① から次が成り立つ．

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\log_e a}$$

とくに，対数の底が $e$ のときは，次のようになる．

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}\log_e e = \frac{1}{x}$$

$\longleftarrow \log_e e = 1$

$e$ を底とする対数を**自然対数**という．微分法や積分法では $\log_e x$ の底 $e$ を省略して，単に $\boldsymbol{\log x}$ と書くことが多く，自然対数を単に対数ということがある．

対数関数の導関数についてまとめると，次のようになる．

**対数関数の導関数**

**1**　$\boldsymbol{(\log x)' = \dfrac{1}{x}}$　　**2**　$\boldsymbol{(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log a}}$

**例題 3.5** 次の関数を微分せよ．

(1)　$y = \log(2x+3)$　　(2)　$y = x\log_2 x$

**【解】** (1)　$y' = \dfrac{1}{2x+3}\cdot(2x+3)' = \dfrac{2}{2x+3}$　　⟵ 合成関数の微分法の公式を利用．

(2)　$y' = (x)'\log_2 x + x(\log_2 x)' = \log_2 x + x\cdot\dfrac{1}{x\log 2}$

$= \log_2 x + \dfrac{1}{\log 2}$

一般に，次のことが成り立つ．

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

**練習 3.18** 次の関数を微分せよ．

(1)　$y = \log 3x$　　(2)　$y = \log_2(2x-1)$

(3)　$y = \log(x^2+1)$　　(4)　$y = x\log x - x$

次に，関数 $\log|x|$ の導関数について調べてみよう．

$x > 0$ のとき　$\log|x| = \log x$ であるから

$$(\log|x|)' = (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$x < 0$ のとき　$\log|x| = \log(-x)$ であるから

$$(\log|x|)' = \{\log(-x)\}' = \frac{1}{-x}\cdot(-x)' = \frac{1}{x}$$

したがって，$x$ の正・負に関係なく，$\log|x|$ の導関数は，次のようになる．

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

**練習 3.19** 次のことを示せ．

$$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x\log a}$$

これまで調べたことをまとめると，次のようになる．

**絶対値を含む導関数**

**3**　$\boldsymbol{(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}}$　　　　**4**　$\boldsymbol{(\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x\log a}}$

**例題 3.6** 次の関数を微分せよ．

(1)　$y = \log|\cos x|$　　　　(2)　$y = \log_2|x^2-1|$

**【解】** (1)　$y' = \dfrac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

(2)　$y' = \dfrac{1}{(x^2-1)\log 2}\cdot(x^2-1)' = \dfrac{2x}{(x^2-1)\log 2}$

一般に，次のことが成り立つ．

$$(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

**練習 3.20** 次の関数を微分せよ．

(1)　$y = \log|2x+3|$　　　(2)　$y = \log|\sin x|$

(3)　$y = \log_4|2x-1|$　　　(4)　$y = \log_2|x^2-4|$

**応用例題 3.1** $\alpha$ を実数とするとき，次のことを示せ．

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \text{ただし，} x > 0$$

> **考え方**　$x^\alpha > 0$ であるから，$y = x^\alpha$ について両辺の対数をとると，$\log y = \alpha\log x$ となる．この両辺の関数を $x$ で微分する．

**【解】** $x^\alpha > 0$ であるから，$y = x^\alpha$ について，両辺の対数をとると

$$\log y = \alpha\log x$$

この両辺の関数を $x$ で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \alpha\cdot\frac{1}{x} \qquad \longleftarrow (\log y)' = \frac{y'}{y}$$

すなわち　$$y' = \alpha\cdot\frac{y}{x}$$

よって　$$(x^\alpha)' = \alpha\cdot\frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

**練習 3.21** 応用例題3.1の方法にならって，次の関数を微分せよ．

(1)　$y = x^x \quad (x > 0)$　　(2)　$y = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}$

### C 指数関数の導関数

$a$ を1でない正の定数とするとき，指数関数 $y = a^x$ の導関数を調べてみよう．

$a^x > 0$ であるから，$y = a^x$ について両辺の対数をとると

$$\log y = x \log a$$

この両辺の関数を $x$ で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \log a$$

よって　$y' = y \log a$

すなわち　$(a^x)' = a^x \log a$

とくに，$a = e$ のとき，$\log a = \log e = 1$ であるから

$$(e^x)' = e^x$$

以上をまとめると，次のようになる．

**絶対値を含む導関数**

**1**　$\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$　　**2**　$\boldsymbol{(a^x)' = a^x \log a}$

**例題 3.7** 次の関数を微分せよ．

(1)　$y = e^{3x}$　　(2)　$y = x \cdot 2^x$

**【解】** (1)　$y' = e^{3x} \cdot (3x)' = 3e^{3x}$

(2)　$y' = (x)'2^x + x(2^x)' = 1 \cdot 2^x + x \cdot 2^x \log 2$

$= 2^x(1 + x\log 2)$

**練習 3.22** 次の関数を微分せよ．ただし，(6) の $a$ は 1 でない正の定数とする．

(1)　$y = e^{2x}$　　(2)　$y = e^{-x^2}$

(3)　$y = 3^x$　　(4)　$y = 2^{-3x}$

(5)　$y = xe^x$　　(6)　$y = (2x-1)a^x$

### 3.2.2　第 $n$ 次導関数

関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $x$ の関数である．この関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき，さらに微分して得られる導関数を，関数 $y = f(x)$ の**第 2 次導関数**といい，$\boldsymbol{y''}$，$\boldsymbol{f''(x)}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)}$ などの記号で表す．さらに，$f''(x)$ の導関数を $y = f(x)$ の**第 3 次導関数**といい，$\boldsymbol{y'''}$，$\boldsymbol{f'''(x)}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^3y}{dx^3}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^3}{dx^3}f(x)}$ などの記号で表す．

**[注意]** $y'$，$f'(x)$ を第 1 次導関数ということがある．

**例 3.8**　(1)　$y = \sin x$ について

$$y' = \cos x,\ \ y'' = -\sin x,\ \ y''' = -\cos x$$

(2)　$y = e^{-x}$ について

$$y' = -e^{-x},\ \ y'' = e^{-x},\ \ y''' = -e^{-x}$$

**練習 3.23** 次の関数について，第 3 次までの導関数を求めよ．ただし，(1) の $a$ は 0 でない定数とする．

(1)　$y = ax^3$　　　　(2)　$y = \dfrac{1}{x}$

(3)　$y = \cos x$　　　　(4)　$y = \log x$

(5) $y = e^x$

(6) $y = e^{-2x}$

一般に，関数 $y = f(x)$ を $n$ 回微分して得られる関数を，$y = f(x)$ の**第 $\boldsymbol{n}$ 次導関数**といい，$\boldsymbol{y^{(n)}}$，$\boldsymbol{f^{(n)}(x)}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^n y}{dx^n}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)}$ などの記号で表す．なお，$y^{(1)}$，$y^{(2)}$，$y^{(3)}$ は，それぞれ $y'$，$y''$，$y'''$ を表す．

たとえば，関数 $y = e^{-x}$ について，$y^{(n)} = (-1)^n e^{-x}$ である．

**練習 3.24** 次の関数の第 $n$ 次導関数を求めよ．

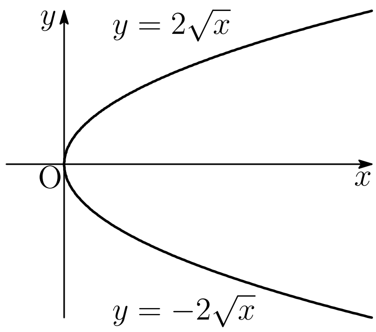
(1) $y = x^n$

(2) $y = e^{2x}$

### 3.2.3　曲線の方程式と導関数

**A $x$，$y$ の方程式と導関数**

方程式 $y^2 = 4x$ の表す曲線は，右の図のような放物線である．この式を $y$ について解くと，次のようになる．




$$y = \pm 2\sqrt{x}$$

よって，この放物線は，2 つの関数

$$y = 2\sqrt{x} \qquad \cdots ①$$

$$y = -2\sqrt{x} \qquad \cdots ②$$

のグラフを合わせたものである．

関数 ① を微分すると

$$\frac{dy}{dx} = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{y}$$

$\longleftarrow (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$
$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

関数 ② を微分すると

$$\frac{dy}{dx} = -2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{y}$$

これらは，次のようにまとめて表すことができる．

$$y^2 = 4x \text{ ついて} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} \qquad \text{ただし}, y \neq 0$$

**練習 3.25** 円 $x^2+y^2=1$ について，次の問いに答えよ.

(1) 方程式を $y$ について解け.

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ であることを示せ.

次に，$x$，$y$ の方程式が与えられたとき，この方程式は $x$ の関数 $y$ を定めると考え，合成関数の微分法により，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めてみよう．

**応用例題 3.2** 方程式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ で定められる $x$ の関数 $y$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ は次のように表せることを示せ．

$$y \neq 0 \text{ のとき} \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{9y}$$

**考え方**　$y$ を $x$ の関数と考え，方程式の両辺を $x$ で微分する．

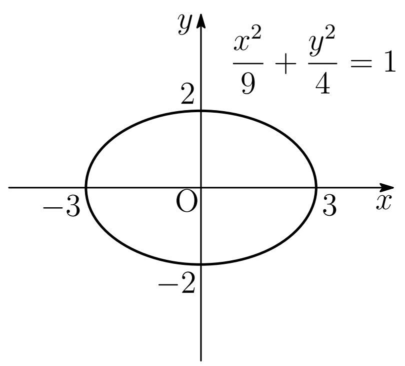
合成関数の微分法により　$\dfrac{d}{dx}y^2=\dfrac{d}{dy}y^2 \cdot \dfrac{dy}{dx}=2y\dfrac{dy}{dx}$

**【解】** $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の両辺を $x$ で微分すると

$$\frac{2x}{9}+\frac{2y}{4}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

よって，$y \neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{9y}$$




**[注意]**　応用例題 3.2 の方程式が表す曲線は，円 $x^2+y^2=9$ を $x$ 軸をもとにして $y$ 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ 倍に縮小したものである．このような曲線を**楕円**(だ)という．

**練習 3.26** 次の方程式で定められる $x$ の関数 $y$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(1)　$y^2=x$　　　(2)　$x^2-y^2=1$

**練習 3.27** $a$，$b$ を正の定数とする．方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で定められる $x$ の関数 $y$ について，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$ と表せることを示せ．

## B 曲線の媒介変数表示と導関数

曲線 $C$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標 $x$，$y$ が，いずれもある 1 つの変数 $t$ の関数として表されるとき，曲線 $C$ について調べてみよう．

**例 3.9** 曲線 $C$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標 $x$，$y$ が，$t$ の関数によって，

$$x=2t^2 \quad \cdots ①$$
$$y=2t \quad \cdots ②$$

で表されるとする．

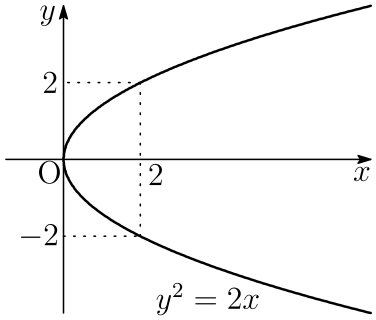
①，② から $t$ を消去すると

$$y^2=4t^2$$

から

$$y^2=2x$$

よって，曲線 $C$ は，放物線 $y^2=2x$ である．



一般に，曲線 $C$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標 $x$，$y$ が 1 つの変数 $t$ の関数 $f(t)$，$g(t)$ によって

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

と表されるとき，この表し方を曲線 $C$ の**媒介変数表示**といい，$t$ を**媒介変数**または**パラメータ**という．媒介変数には $t$ 以外の文字を用いることもある．

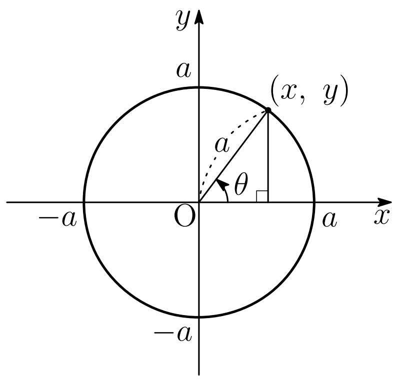
**例 3.10** 原点を中心とする半径 $a$ の円

$$x^2 + y^2 = a^2$$

は，媒介変数 $\theta$ を用いて

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta$$

と表される．




**[注意]** 円の媒介変数表示では，媒介変数として $\theta$ を用いることもある．

座標平面上の曲線 $C$ が，媒介変数 $t$ を用いて

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

と表されているとき，$y$ を $x$ の関数と考えると，合成関数および逆関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

となる．したがって，次のことが成り立つ．

**曲線の媒介変数表示と導関数**

$x = f(t)$，$y = g(t)$ のとき　　$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}}$$

**例題 3.8** $x$ の関数 $y$ が，$t$ を媒介変数として，次の式で表されているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を $t$ の関数として表せ．

(1)　$x = 2t^2$，$y = 4t$　　　(2)　$x = \cos t$，$y = \sin t$

**【解】** (1)　$\dfrac{dx}{dt} = 4t$，$\dfrac{dy}{dt} = 4$ から　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{4t} = \dfrac{1}{t}$

(2)　$\dfrac{dx}{dt} = -\sin t$，$\dfrac{dy}{dt} = \cos t$ から　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos t}{-\sin t} = -\dfrac{1}{\tan t}$

**[注意]**　$x$ または $y$ を用いて表すと，次のようになる．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{y}$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

**練習 3.28** $x$ の関数 $y$ が，$t$ を媒介変数として，次の式で表されているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を $t$ の関数として表せ．

(1) $x = 2t$，$y = t^2 - 1$

(2) $x = 3\cos t$，$y = 2\sin t$

### 3.2.4 補充問題

**4** 次の関数を微分せよ．ただし，(6) の $a$ は1でない正の定数とする．

(1) $y = \dfrac{1}{1 + \cos x}$

(2) $y = \sin^2 x \cos 2x$

(3) $y = (\log x)^2$

(4) $y = \log\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$

(5) $y = \log\dfrac{e^x}{e^x+1}$

(6) $y = a^{2x+1}$

**5** $a$ が定数のとき，次のことを示せ.

$$\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2+a})=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

**6** $x$ の関数 $u$，$v$ の第 2 次導関数が存在するとき，次のことを示せ.

$$(uv)''=u''v+2u'v'+uv''$$

**【答】**

**4**　(1) $y'=\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$　(2) $y'=\sin 2x(1-4\sin^2 x)$　(3) $y'=\dfrac{2\log x}{x}$

(4) $y'=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$　(5) $y'=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$　(6) $y'=2a^{2x+1}\log a$

**5**　$\left[u=x+\sqrt{x^2+a},\ y=\log u\right.$ の合成関数$\left.\right]$

**6**　$\left[(uv)'=u'v+uv'\right.$ より　$\left.(uv)''=(u'v+uv')'\right]$

# 3.3　章末問題

## 3.3.1　章末問題 A

**1** 関数 $y = x\sqrt{x}$ を，導関数の定義に従って微分せよ.

**2** 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}}$

(2) $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^4$

(3) $y=\sqrt{1+\cos x}$

(4) $y=\dfrac{\sin x}{x}$

(5) $y=x^e e^x \quad (x>0)$

(6) $y=2^{\log x}$

**3** $n$ を正の整数とすると，$x \neq 1$ のとき，次の等式が成り立つ．

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

この両辺を $x$ の関数とみて微分し，$x \neq 1$ のとき，次の和を求めよ．

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

**4** 関数 $f(x) = \sin x$ について，次のことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

**5** 関数 $y = e^x(\sin x + \cos x)$ について，次の等式が成り立つことを示せ.

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

**6** $a$，$b$ は正の定数とする．方程式 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ で定められる $x$ の関数 $y$ について，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b^2x}{a^2y}$ と表せることを示せ.

### 3.3.2　章末問題 B

**7** 微分可能な関数 $f(x)$ について，次のことを示せ．

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = 2f'(a)$$

**8** 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

**9** 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$

(2)　$y = x^2(\log x)^3$

(3)　$y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

**10** 関数 $f(x) = \dfrac{(x+2)(x+3)^3}{x^2+1}$ について，$\log|f(x)|$ を微分することにより，$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ および $f'(x)$ を求めよ．

**11** 任意の定数 $a$，$b$ に対して，$t$ の関数 $y = a\cos 2t + b\sin 2t$ は $\dfrac{d^2y}{dt^2} = ky$ を満たすという．この定数 $k$ の値を求めよ．

**12** 方程式 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ で定められる $x$ の関数 $y$ について，$\dfrac{dy}{dx} = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ と表せることを示せ．

**ヒント**

**7** $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h} = f'(a)$

**8** 微分係数の定義を利用する．　(1) $\log 1 = 0$　(2) $e^0 = 1$ に注意．

**【答】**

**1** $y' = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

$\left[\ y' = \lim_{h \to 0} \dfrac{(x+h)\sqrt{x+h} - x\sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h\{(x+h)\sqrt{x+h} + x\sqrt{x}\}}\ \right]$

**2** (1) $y' = \dfrac{3x^2 + x - 1}{2x\sqrt{x}}$ (2) $y' = 4\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$ (3) $y' = -\dfrac{\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}$

(4) $y' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ (5) $y' = (ex^{e-1} + x^e)e^x$ (6) $y' = \dfrac{2^{\log x}\log 2}{x}$

**3** $\dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$

**4** $\Bigg[$ $n = k$ のとき成り立つ，すなわち $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{k\pi}{2}\right)$ であると仮定すると $f^{(k+1)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{k\pi}{2}\right) = \sin\left\{\left(x + \dfrac{k\pi}{2}\right) + \dfrac{\pi}{2}\right\}$ $\Bigg]$

**5** ［$y' = 2e^x\cos x$，$y'' = 2e^x(\cos x - \sin x)$］

**6** $\Bigg[$ 方程式の両辺を $x$ で微分すると $\dfrac{2x}{a^2} - \dfrac{2y}{b^2}\cdot\dfrac{dy}{dx} = 0$ $\Bigg]$

**7** $\left[\ \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a-h) - f(a)}{-h}\ \right]$

**8** (1) 1 (2) 1 ［(1) $f(x) = \log(1+x)$ とすると $f'(0)$

(2) $g(x) = e^x$ とすると $g'(0)$ ］

**9** (1) $y' = -\dfrac{2}{(\cos x + \sin x)^2}$ (2) $y' = 2x(\log x)^3 + 3x(\log x)^2$

(3) $y' = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

**10** $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{2x^3 - x^2 - 8x + 9}{(x+2)(x+3)(x^2+1)}$, $f'(x) = \dfrac{(x+3)^2(2x^3 - x^2 - 8x + 9)}{(x^2+1)^2}$

**11** $k = -4$ $\left[\ \dfrac{dy}{dt} = -2a\sin 2t + 2b\cos 2t,\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -4a\cos 2t - 4b\sin 2t\ \right]$

**12** $\Bigg[$ 方程式の両辺を $x$ で微分すると $\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{dy}{dx} = 0$ $\Bigg]$